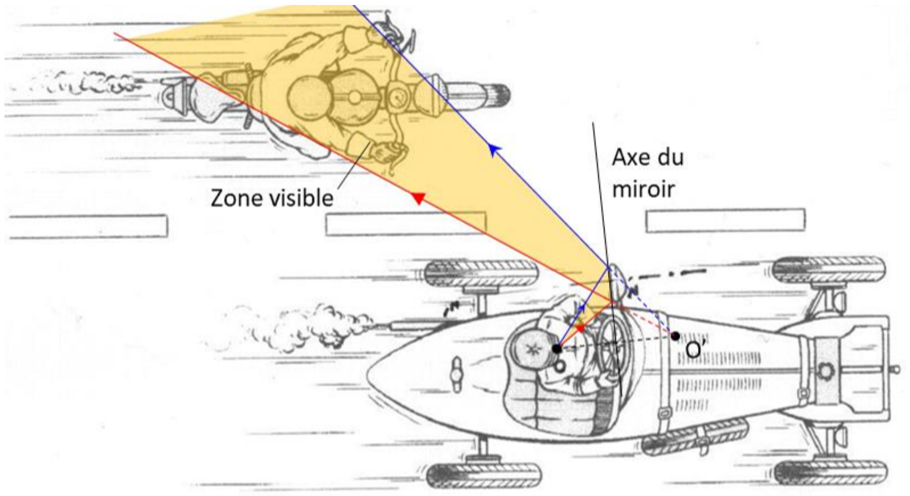
Correction TD - O2

Exercices à maîtriser

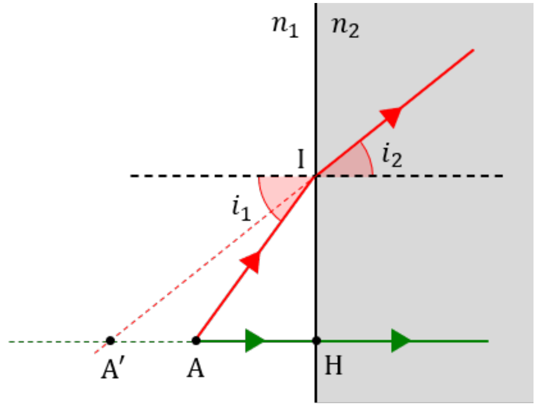
Ex. n°1 • Angle mort ★☆☆ 5772

Oui, le motard est visible dans le rétroviseur. En revanche, s'il avance légèrement, il passera dans l'angle mort.



Ex. n°2 • Image à travers un dioptre plan ★☆☆ 3662

1) Le rayon n'est pas dévié.



2) Puisque $n_1 < n_2$, le rayon est dévié vers la normale.

3) Il faut trouver l'intersection des deux rayons, quitte à les prolonger. Les rayons se croisent avant le dioptre, l'image est donc virtuelle : on ne peut pas placer un écran en ce point pour observer l'image.

4) Dans les triangles HIA et HIA′, on a :

$$\tan(i_1) = \frac{\mathrm{HI}}{\mathrm{HA}} \quad \text{et} \quad \tan(i_2) = \frac{\mathrm{HI}}{\mathrm{HA'}}$$

On en déduit :

$$\boxed{\mathrm{HA'} = \mathrm{HA} \times \frac{\tan(i_1)}{\tan(i_2)}}$$

La position de A′ dépend de l'angle i_1 choisi. Ainsi, tous les rayons issus de A ne convergent (après avoir traversé le dioptre) pas en un unique point A′. Le dioptre plan n'est donc pas stigmatique.

5) Dans les conditions de Gauss, l'équation précédente devient :

$$\mathrm{HA'} = \mathrm{HA} \times \frac{i_1}{i_2}$$

La loi de Snell-Descartes dans les conditions de Gauss donne :

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2) \quad \Rightarrow \quad n_1 i_1 = n_2 i_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

On en déduit :

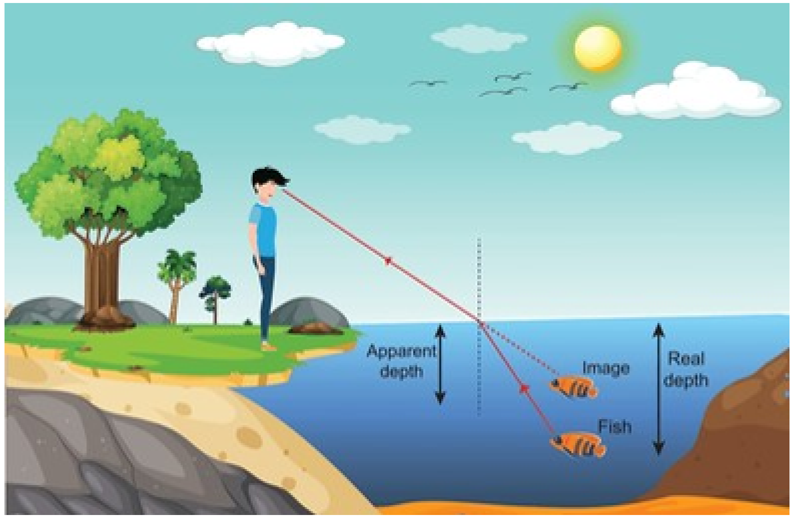
$$\boxed{\mathrm{HA'} = \mathrm{HA} \times \frac{n_2}{n_1}}$$

Cette position ne dépend plus de l'angle i_1 choisi (tant que ce dernier reste petit). Le dioptre plan devient donc stigmatique dans les conditions de Gauss.

6) La lumière issu du poisson et arrivant à un observateur passe d'un milieu d'indice $n \sim 1,3$ à un milieu d'indice 1. L'observateur, qui voit l'image du poisson à travers le dioptre, le voit donc à une profondeur :

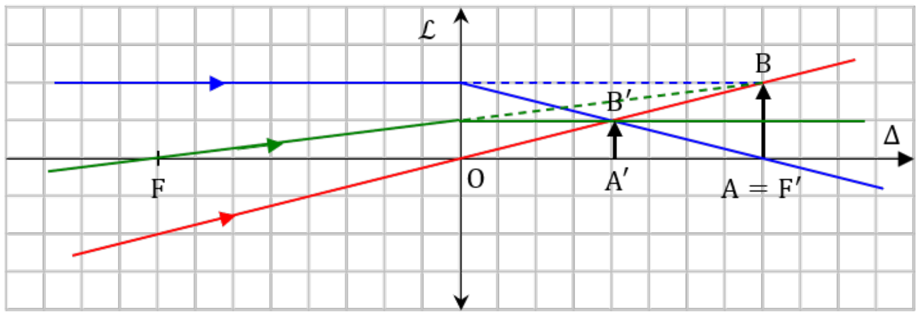
$$\mathrm{HA}' = \mathrm{HA} \times \frac{1}{n} < \mathrm{HA}$$

Il le voit donc moins profond que ce qu'il le l'est réellement.



Ex. n°3 • Image d'un objet dans le plan focal image ★★☆ 8554

1)



On voit graphiquement que l'image est réelle, située au milieu de O et F', avec un grandissement $\gamma = 0{,}5$.

2) On utilise la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{OA}'}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{1}{f'} \quad \text{avec :} \quad \overline{\mathrm{OA}} = f'$$

On a donc :

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{OA}'}} = \frac{2}{f'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{\mathrm{OA}'} = \frac{f'}{2} > 0}$$

L'image est donc réelle.

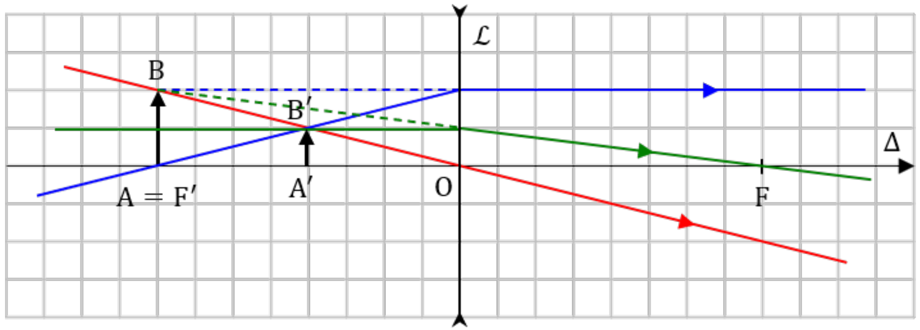
Relation de grandissement de Descartes :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{\mathrm{OA}'}}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{1}{2}}$$

3) Avant même de commencer, on peut dire que les calculs précédents sont identiques, puisque les relations de conjugaison et de grandissement sont identiques pour les lentilles convergentes et divergentes. Donc :

$$\boxed{\overline{\mathrm{OA}'} = \frac{f'}{2} < 0 \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{2}}$$

La seule différence est que $f' < 0$ pour une lentille divergente, donc l'image est virtuelle.



Ex. n°4 • Réalisation d'un système afocal ★★☆ 8028

1) On cherche A' tel que :

$$\mathrm{A}\,(\infty \text{ sur } \Delta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathrm{A}'$$

D'après l'énoncé, on a immédiatement $A' = F'$ qui est à l'infini sur l'axe optique.

2) Par définition d'un système afocal :

$$A\,(\infty \text{ sur } \Delta) \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A'\,(\infty \text{ sur } \Delta)$$

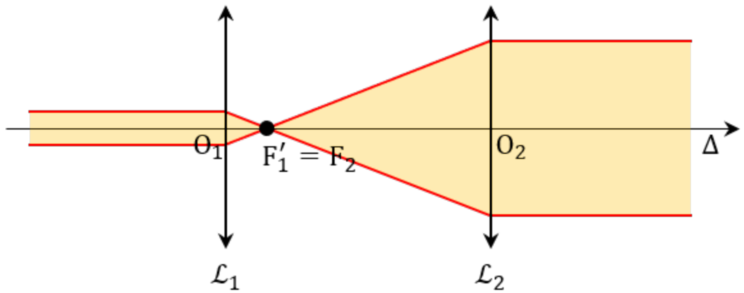
On en déduit que A_1 est l'image de A à travers $\mathcal{L}_1$. Par définition, $A_1 = F_1'$.

De plus, A_1 est l'objet dont l'image est $A'\,(\infty \text{ sur } \Delta)$ à travers $\mathcal{L}_2$. Par définition, $A_1 = F_2$.

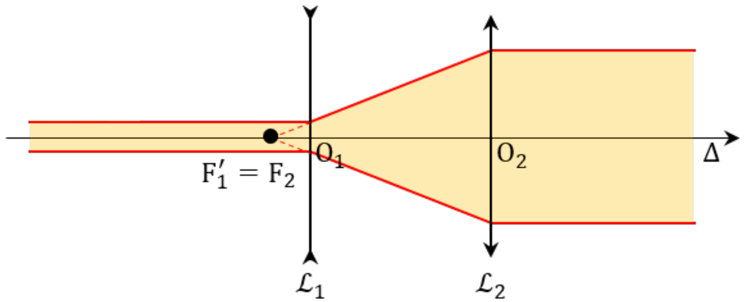
Bilan : le foyer image de la première lentille doit être confondu avec le foyer objet de la deuxième.

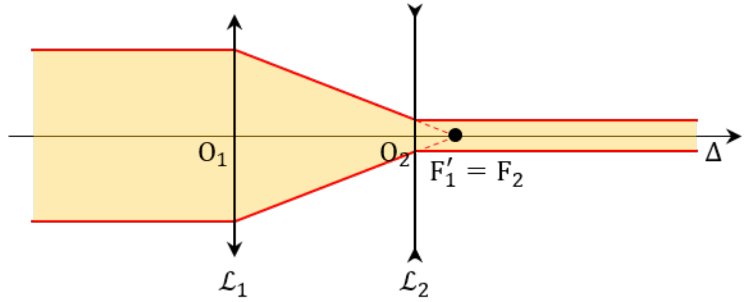
$$A\,(\infty \text{ sur } \Delta) \xrightarrow{\mathcal{L}_1} F_1' = F_2 \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A'\,(\infty \text{ sur } \Delta)$$

3) Oui.

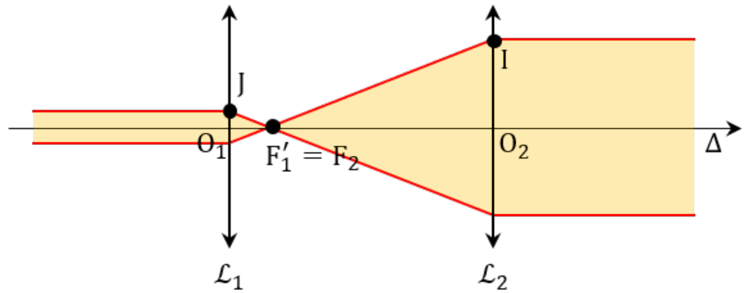


4) Oui, dans les deux sens (d'après le principe de retour inverse de la lumière).





5) On appelle d le diamètre initial du faisceau et D le diamètre final.



On applique le théorème de Thalès dans les triangles F_2IO_2 et F_2O_1J :

$$\frac{-\,\overline{F_1'O_1}}{\overline{F_2O_2}} = \frac{\overline{O_1J}}{\overline{O_2I}} \quad \Rightarrow \quad \frac{f_1'}{f_2'} = \frac{d/2}{D/2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_1' = \frac{df_2'}{D} = 5 \text{ mm}}$$

Les deux lentilles sont séparées d'une distance :

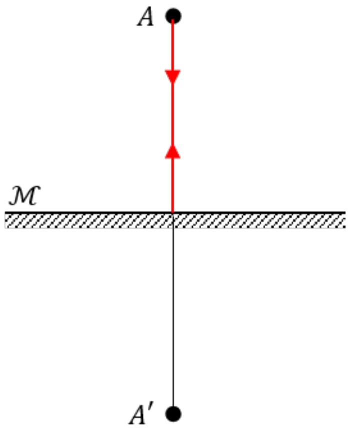
$$\boxed{\overline{O_1O_2} = f_1' + f_2' = 55 \text{ mm}}$$

Pour aller plus loin

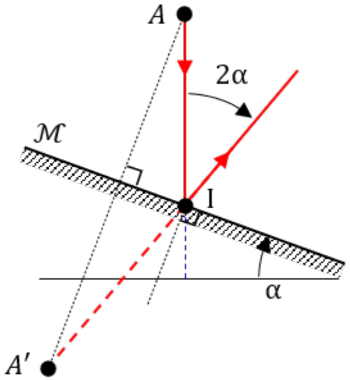
Ex. n°5 • Rotation d'un miroir ★☆☆ 4779

1) Angle d'incidence vaut 0, donc l'angle de réflexion vaut également 0 d'après les lois de Snell-Descartes.

On peut également tracer A' l'image de A et tracer le rayon réfléchi à l'aide de A'.



2) On peut de nouveau tracer A′ l'image de A et tracer le rayon réfléchi à l'aide de A′.



En travaillant dans les triangles rectangles en I, on montre facilement que l'angle d'incidence vaut α. Donc l'angle de réflexion vaut également α d'après les lois de Snell-Descartes.

L' angle entre le rayon incident et le rayon réfléchi vaut donc : $\boxed{2\alpha}$

Ex. n°6 • Objectif photographique 2103

On utilise la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{OA}} = \left(\frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \frac{1}{f'}\right)^{-1}$$

Or, puisque l'image se forme au point P :

$$\overline{\mathrm{OA'}} = \overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OF'}} + \overline{\mathrm{F'P}} = f' + \tau$$

Ainsi,

$$\overline{\mathrm{OA}} = \left(\frac{1}{f'+\tau} - \frac{1}{f'}\right)^{-1} = -\frac{f'\,(f'+\tau)}{\tau}$$

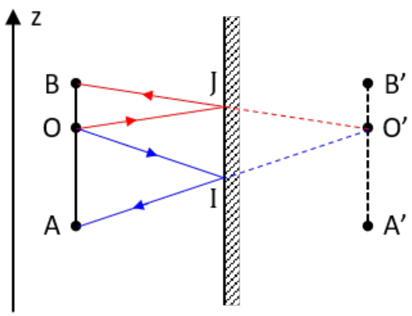
Puisque $\overline{\mathrm{OA}} < 0$ (objet réel), alors $\mathrm{OA} = -\overline{\mathrm{OA}}$. On en déduit :

$$\boxed{\mathrm{OA} = \frac{f'\,(f'+\tau)}{\tau} = \begin{cases} d_{max} = \infty & \text{si } \tau = 0 \\ d_{min} = 1{,}4 \text{ m} & \text{si } \tau = 4{,}25 \text{ mm} \end{cases}}$$

On peut photographier les objets situés très loin mais on ne peut pas photographier les objets situés trop près.

Ex. n°7 • Taille du miroir 0587

On note O la position des yeux de l'homme.



Pour se voir en entier, le miroir doit mesurer au minimum :

$$d_{min} = z_J - z_I = \frac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{O}}}{2} - \frac{z_{\mathrm{O}} - z_{\mathrm{A}}}{2} = \frac{L}{2}$$

Cela correspond à la moitié de la taille de l'homme. Cette longueur ne dépend pas de la distance au mur.

Ex. n°8 • Formation d'une image 7990

Formule de grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{\mathrm{FO}}}{\overline{\mathrm{FA}}} = \frac{\overline{\mathrm{FO}}}{\overline{\mathrm{FO}} + \overline{\mathrm{OA}}} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{OA}} = \frac{\overline{\mathrm{FO}}}{\gamma} - \overline{\mathrm{FO}} = f'\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)$$

On souhaite que $|\gamma| = 4$. Attention, l'énoncé ne précise pas si l'image est droite ($\gamma > 0$) ou renversé ($\gamma < 0$). On sait en revanche que :

$$\gamma = \frac{\overline{\mathrm{OA'}}}{\overline{\mathrm{OA}}}$$

Ainsi, puisque $\overline{\mathrm{OA'}} > 0$ (image réelle), alors $\overline{\mathrm{OA}}$ doit être du même signe que γ.

Si $\gamma = +4 > 0$, alors :

$$\overline{\mathrm{OA}} = -22{,}5 \text{ cm} < 0$$

Ce qui est interdit (l'image est virtuelle dans ce cas).

Si $\gamma = -4 < 0$, alors :

$$\boxed{\overline{\mathrm{OA}} = -37{,}5 \text{ cm} < 0}$$

Ce qui est autorisé (l'image est bien réelle dans ce cas).

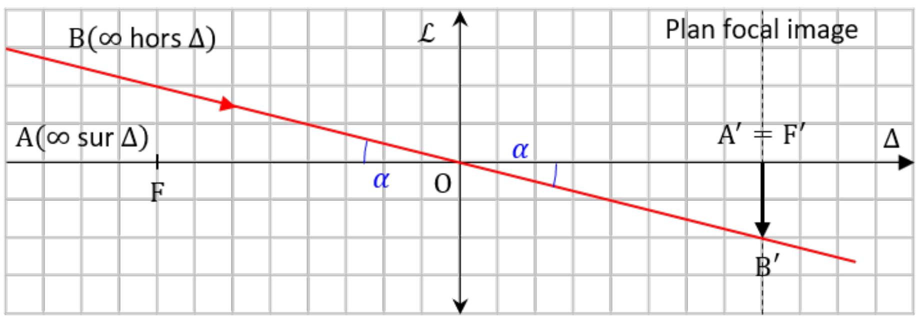
Il faut placer l'objet 37,5 cm devant de centre optique de la lentille.

Ex. n°9 • Allumer un feu avec une lentille ★★☆ 4416

1) On note AB le soleil situé à l'infini, avec A sur l'axe optique et B hors axe optique (taille angulaire α), et $\mathrm{A'B'}$ son image par la lentille.

$$\overline{\mathrm{AB}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \overline{\mathrm{A'B'}}$$

Par définition, $\mathrm{A'} = \mathrm{F'}$ le foyer principe image. Toujours par définition, $\mathrm{B'}$ est un foyer secondaire image. Déterminons graphiquement sa position :



On voit graphiquement que la taille angulaire de l'image est égale à la taille angulaire de l'objet. Dans le triangle $\mathrm{OA'B'}$:

$$\tan(\alpha) = \frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{OA'}} = \frac{d}{f'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = f' \tan(\alpha) = 8{,}7 \times 10^{-4} \text{ m}}$$

2) La puissance collectée par la lentille de surface S vaut :

$$\mathcal{P} = \varphi \times S = \varphi \times \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2$$

L'intégralité de cette puissance (lentille parfaitement transparent) se retrouve concentrée dans un disque de diamètre $\mathrm{A'B'}$.

$$\mathcal{P} = \varphi_r \times \pi \left(\frac{\mathrm{A'B'}}{2}\right)^2$$

On en déduit :

$$\mathcal{P} = \varphi_r \times \pi \left(\frac{\mathrm{A'B'}}{2}\right)^2 = \varphi \times \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi_r = \varphi \times \left(\frac{D}{\mathrm{A'B'}}\right)^2 = 525 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}}$$

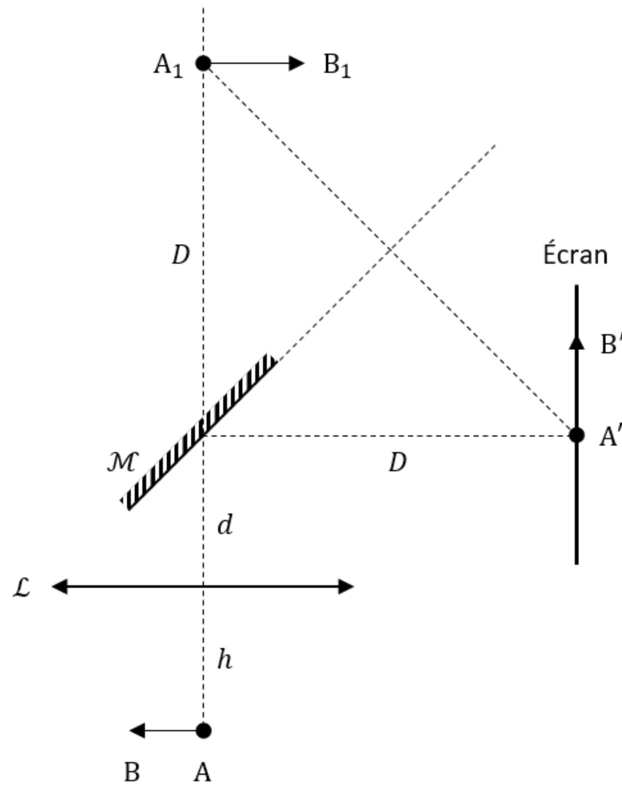
3) On en déduit :

$$\varphi_r = \sigma \times T^4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \left(\frac{\varphi_r}{\sigma}\right)^{1/4} = 1744 \text{ K} = 1471 \text{ °C}}$$

Ex. n°10 • Le rétroprojecteur ★★⯪ 1696

1) $\mathrm{A'}$ est sur l'écran et sur l'axe optique.

$\mathrm{A_1}$ est le symétrique de $\mathrm{A'}$ par rapport à l'axe du miroir. Puisqu'il s'agit d'une lentille convergente avec l'objet placé au-delà du plan focal objet, l'image est réelle et inversée, ce qui permet de placer $\mathrm{B_1}$. $\mathrm{B'}$ est le symétrique de $\mathrm{B_1}$ par rapport à l'axe du miroir.



2) Relation de conjugaison sur la lentille :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{d+D} + \frac{1}{h} = \frac{1}{f'}$$

On en déduit :

$$\boxed{h = \left(\frac{1}{f'} - \frac{1}{d+D}\right)^{-1} = 60 \text{ cm}}$$

3) Par composition des grandissements :

$$\gamma = \gamma_{\mathcal{L}} \times \gamma_{\mathcal{M}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}} \times 1 = -\frac{d+D}{h} = \boxed{1 - \frac{d+D}{f'} = -5{,}2}$$

4) Pour augmenter le grandissement, il faut augmenter d (car γ augmente en valeur absolue lorsque d augmente). Mais l'image doit se former sur l'écran, d et h sont donc toujours reliés par la relation de la Q2. Donc lorsque d augmente, h diminue.

Remarque : pour faire ce raisonnement rapidement et de tête, prendre un cas extrême : que se passe-t-il il $d \to \infty$? Alors $\gamma \to -\infty$ donc le grandissement augmente. Et $h \to f' = 50$ cm donc h diminue.

Pour s'entraîner au DS

Ex. n°11 • Doublet de lentilles ★★☆ 6544

1) On utilise les relations de conjugaison.

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{O_1A_1} = \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{f'_1}\right)^{-1} = -7{,}5 \text{ cm}}$$

car : $d = \overline{O_1A} = -3$ cm.

De plus,

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2} \quad \text{et} \quad \overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} = -e + \overline{O_1A_1}$$

Ainsi,

$$\boxed{\overline{O_2A'} = \left(\frac{1}{-e + \overline{O_1A_1}} + \frac{1}{f'_2}\right)^{-1} = 26{,}6 \text{ cm}}$$

A est un objet réel pour $\mathcal{L}_1$.

A_1 est une image virtuelle pour $\mathcal{L}_1$ et un objet réel pour $\mathcal{L}_2$.

A' est une image réelle pour $\mathcal{L}_2$.

2) Soit un objet AB. Relation de grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \times \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \gamma_1 \times \gamma_2 = \boxed{\frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \times \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = -7}$$

L'image est renversée et agrandie 7 fois.

3) Par définition de F' :

$$\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1} F'_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} F'$$

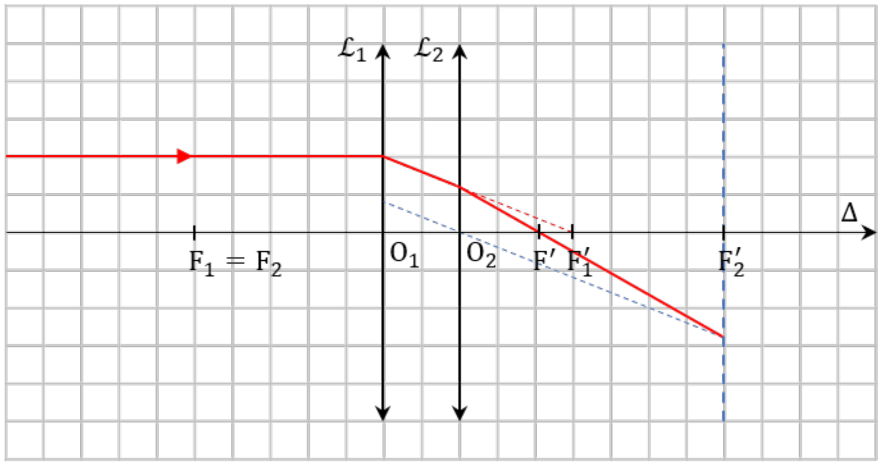
F'_1 doit être est l'objet de F' par la lentille $\mathcal{L}_2$. On en déduit :

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F'_1}} = \frac{1}{f'_2} \quad \text{avec :} \quad \overline{O_2F'_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1} = -e + f'_1$$

Donc :

$$\boxed{\overline{\mathrm{O_2F'}} = \left(\frac{1}{-e+f_1'} + \frac{1}{f_2'}\right)^{-1} = 2{,}1 \text{ cm}}$$

Graphique :



Construction :

- On prend un rayon qui vient de ∞ sur Δ. Après $\mathcal{L}_1$, il semble passer par F'_1.
- Ce rayon est un rayon quelconque pour $\mathcal{L}_2$. On trace le rayon parallèle passant par $\mathrm{O_2}$. Les deux rayons émergents vont se croiser dans le plan focal image de $\mathcal{L}_2$.
- Le point $\mathrm{F'}$ est l'intersection entre le rayon émergent et l'axe optique. Il est bien situé à 2,1 cm de $\mathrm{O_2}$.

4) Par définition de F :

$$\mathrm{F} \xrightarrow{\mathcal{L}_1} F_2 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \infty$$

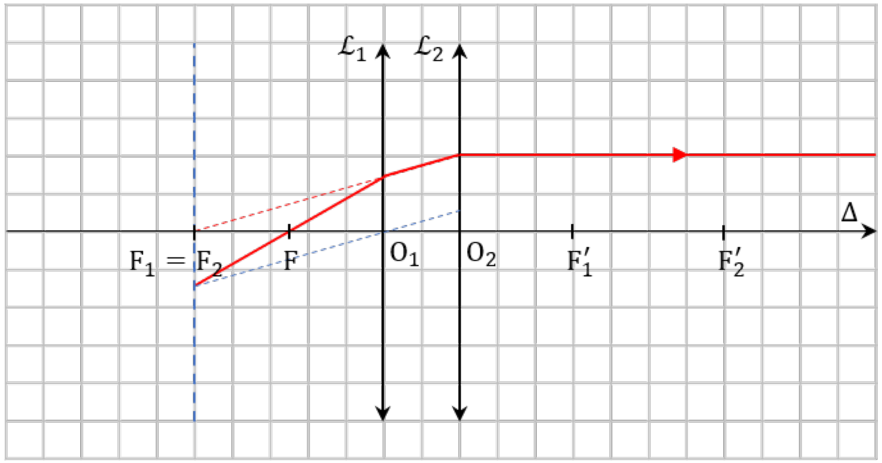
L'objet qui, à travers $\mathcal{L}_2$ donne ∞, est son point focal objet $\mathrm{F_2}$. Donc $\mathrm{F_2}$ doit être est l'image de F par la lentille $\mathcal{L}_1$. On en déduit :

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{O_1F_2}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{O_1F}}} = \frac{1}{f_1'} \quad \text{avec :} \quad \overline{\mathrm{O_1F_2}} = \overline{\mathrm{O_1O_2}} + \overline{\mathrm{O_2F_2}} = e - f_2'$$

Donc :

$$\boxed{\overline{\mathrm{O_1F}} = \left(\frac{1}{e-f_2'} - \frac{1}{f_1'}\right)^{-1} = -2{,}5 \text{ cm}}$$

Graphique :



Construction :

- On prend un rayon qui émerge de $\mathcal{L}_2$ parallèlement à Δ. Avant $\mathcal{L}_2$, il semble passer par $\mathrm{F_2}$.
- Ce rayon est un rayon quelconque pour $\mathcal{L}_1$. On trace le rayon parallèle passant par $\mathrm{O_1}$. Les deux rayons incident vont se croiser dans le plan focal objet de $\mathcal{L}_1$.
- Le point F est l'intersection entre le rayon incident et l'axe optique. Il est bien situé à $-2{,}5$ cm de $\mathrm{O_1}$.

Ex. n°12 • Distance focale d'une lentille plan-convexe ★★★ 4672

1) On se place dans le triangle CIJ rectangle en J et on obtient à l'aide d'angles alternes-internes :

$$\sin(i_1) = \frac{y}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_1 = \arcsin\left(\frac{y}{R}\right)}$$

2) On peut observer un phénomène de réflexion totale lorsque l'on passe d'un milieu donné vers un milieu moins réfringent, ce qui est bien le cas ici.

L'angle limite est donné par la formule :

$$i_{1,lim} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_{lim} = R\,\sin(i_{1,lim}) = \frac{R}{n}}$$

3) Loi de Snell-Descartes de la réfraction :

$$\sin(i_2) = n\,\sin(i_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_2 = \arcsin\left(\frac{ny}{R}\right)}$$

4) Dans le triangle JIF$'$, l'angle en F$'$ vaut $i_2 - i_1$:

$$\tan(i_2 - i_1) = \frac{\text{JI}}{\text{JF}'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{\text{JF}'} = \frac{y}{\tan(i_2 - i_1)} = \frac{y}{\tan\Big(\arcsin\Big(\dfrac{ny}{R}\Big) - \arcsin\Big(\dfrac{y}{R}\Big)\Big)}}$$

5) Finalement,

$$\begin{aligned} f' &= \overline{\text{OF}'} \\ &= \overline{\text{OC}} + \overline{\text{CJ}} + \overline{\text{JF}'} \\ &= (e - R) + R\,\cos(i_1) + \overline{\text{JF}'} \\ &= e + R\left[\cos\Big(\arcsin\Big(\frac{y}{R}\Big)\Big) - 1 + \frac{y/R}{\tan\Big(\arcsin\Big(\dfrac{ny}{R}\Big) - \arcsin\Big(\dfrac{y}{R}\Big)\Big)}\right] \end{aligned}$$

On observe que la position du foyer image F$'$ dépend de y. La lentille n'est donc pas rigoureusement stigmatique.

6) Dans les conditions de Gauss :

$$\cos(x) \simeq 1 \quad \tan(x) \simeq x \quad \text{et} \quad \sin(x) \simeq x \;\Rightarrow\; x \simeq \arcsin(x)$$

Si le rayon est dans les conditions de Gauss, il est proche de l'axe optique, donc : $y/R \ll 1$. Alors :

$$\tan\Big(\arcsin\Big(\frac{ny}{R}\Big) - \arcsin\Big(\frac{y}{R}\Big)\Big) \simeq \tan\Big(\frac{ny}{R} - \frac{y}{R}\Big) \simeq \frac{ny}{R} - \frac{y}{R} = (n-1)\,\frac{y}{R}$$

Finalement,

$$f' \simeq e + R\left[1 - 1 + \frac{y/R}{(n-1)\,y/R}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{f' = e + \frac{R}{n-1}}$$

On observe que la position du foyer image F$'$ ne dépend plus de y. La lentille devient stigmatique dans les conditions de Gauss.